EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E FLESSIBILITA' DEL SISTEMA PENSIONISTICO

ANNA ATTIAS
Università di Roma "La Sapienza"
anna.attias@uniroma1.it

SOMMARIO
In un precedente lavoro[1] si è presentato un modello demografico, costola di quello di Lesile, dimostrando, attraverso la teoria di Perron Frobenius, l'esistenza di una distribuzione d'età asintotica.
In quest'articolo si traslano i risultati teorici raggiunti alla popolazione italiana e si verifica l'impatto che l'equilibrio demografico asintotico ha sul nostro sistema pensionistico gestito a ripartizione, alla luce della legge 8 agosto 1995, n° 335. Tutto ciò con lo scopo di individuare un'aliquota contributiva flessibile che, in termini di tasso di sostituzione, in altre parole di adeguatezza delle prestazioni, consenta di fronteggiare il rischio calcolato di una pensione contributiva non adatta al mantenimento del tenore di vita.
Questo lavoro, pur riferendosi specificatamente alla legislazione italiana vigente, non ha una valenza solo nazionale, poiché sono molti i paesi che hanno deciso di passare da un sistema retributivo ad uno contributivo per il calcolo della prestazione pensionistica.

PAROLE CHIAVE: equilibrio demografico, ripartizione pura, tasso di sostituzione, aliquota contributiva flessibile.

INTRODUZIONE

Nel 1995 a seguito dell'approvazione della Legge 335, detta legge Dini, nel nostro sistema pensionistico, gestito a ripartizione pura, il calcolo della pensione avviene attraverso il metodo contributivo e non più retributivo, fatte salve le posizioni vigenti che possono, a seconda dei requisiti maturati, essere calcolate in modo retributivo totalmente o parzialmente (pro rata).
Questa nuova filosofia di calcolo della prestazione cambierà profondamente, a regime, la pensione in termini di tasso di sostituzione, in altre parole in relazione all'ultima retribuzione. E' in questa ottica che abbiamo cercato di esplicitare un'aliquota contributiva *flessibile* alle esigenze dei lavoratori futuri pensionati.
Nella prima sezione è richiamato il Teorema sull'esistenza di un equilibrio demografico asintotico, dell'articolo sopracitato, adattando la procedura alla popolazione italiana ed alle sue caratteristiche.
In quella successiva è descritta la dinamica degli attivi e di tutte le categorie dei pensionati in Italia.
Nell'ultima sezione, sulla base di quanto presentato nelle sezioni precedenti, è calcolata l'aliquota contributiva corrispondente all'equilibrio demografico asintotico che, in un sistema finanziario gestito a ripartizione, con calcolo contributivo della prestazione, come quello italiano, può garantire una rendita pensionistica coerente con la retribuzione, cioè un tasso di sostituzione che elimini o almeno riduca il rischio calcolato di una prestazione che non consente, ai lavoratori divenuti pensionati, di mantenere entro limiti ragionevoli il loro tenore di vita.
Nello studio alcuni dei parametri demografici finanziari ed attuariali si sono ipotizzati costanti.

Non è facile reperire in letteratura contributi che contemperano gli aspetti demografici con quelli finanziario-attuariali, riferiti a problematiche previdenziali, di tipo dinamico.

---
[1] cfr. [5]

E’ facile individuare viceversa modelli di tipo esclusivamente demografici come quello di Lesile, di Caswell o di Varga[2]; quello per coorte o quello di Holt-Winters, generalizzazione dei modelli di spianamento esponenziale; quello di Baldacci e Lungaresi del 1995[3] con un approccio dinamico, ma nessuno di questi ha trovato applicazione diretta in ambito pensionistico per i sistemi gestiti a ripartizione pura.
In ambito nazionale e più strettamente attuariale “Il modello Inps e le prime proiezioni al 2010” di Mario Alberto Coppini del 1989[4] è un esempio di tavole proiettate che valuta l’aspetto demografico ed attuariale con lo scopo di costruire tavole di sopravvivenza proiettate sia della popolazione generale che per particolari categorie (vedovi, vedove, inabili e invalidi), sia individuando particolari probabilità, come quelle di nuzialità o di lasciare famiglia, per calcolare ammontari di oneri e prestazioni relativamente al regime dei lavoratori dipendenti ed ai tre regimi dei lavoratori autonomi (coltivatori diretti, artigiani, commercianti). Lo scopo è fornire proiezioni per 20/25 anni dei quattro regimi indicati e consentire il periodico aggiornamento di tali proiezioni, in base ai dati statistici che via via si acquisiscono.
Una precedente indagine demografico-attuariale in Italia è del 1937 a cura del Servizio Statistico Attuariale dell’Inps per la gestione dei lavoratori dipendenti.
Ci sono poi il modello di Franco e Morcaldo del 1986[5] che fa uso esclusivamente dei dati della popolazione generale; il modello Alvaro-Pedullà-Ricci del 1987[6] che si basa sulla consistenza degli iscritti risultanti dai dati Inps, senza considerare anzianità di servizio e salari; un lavoro di Caselli, Peracchi e Lipsi del 2003[7] che si occupa di problematiche di connessione tra pensioni pubbliche e aspetti demografici riferiti soprattutto alla mortalità. In ogni caso tutti questi non giungono a nessuna formalizzazione matematica di un modello dinamico né ad alcuna considerazione di carattere generale sulla relazione tra aspetto demografico e tecnico attuariale e finanziario.
Nella letteratura internazionale c’è un lavoro di Maurin et altri del 2001[8] che segue però una logica completamente diversa, cioè quella della viabilità; un lavoro di Franco sempre del 2001[9] riferito a sistemi pensionistici gestiti a ripartizione pura; un articolo di Angrisani e Attias del 2004[10] che dimostra un teorema di rappresentazione per un metodo, detto a traiettorie individuali esatte, di gestione di un fondo pensione, con la caratteristica originale di essere impostato su base assiomatica; due lavori di Angrisani del 2002[11] e del 2006[12] che ipotizzano modalità di gestione di un fondo pensione del tipo IVS (invalidità, vecchiaia e superstiti), rispettivamente a ripartizione pura il primo e a capitalizzazione parziale il secondo, con la creazione per questo di una riserva differenziale.

Il contributo del presente lavoro è quello di aver formulato un modello dinamico per la componente attuariale partendo dal modello dinamico per la componente demografica.
L’apporto metodologico iniziale è fornito dal teorema sull’equilibrio demografico asintoticamente raggiunto, dell’articolo sopramenzionato, che ha come conseguenza l’individuazione di un’*aliquota contributiva flessibile* che consente di garantire un *tasso di sostituzione flessibile*, cioè “adeguato” alle aspettative dei futuri pensionati.

[2] cfr. [14], [15], [8], [17],
[3] cfr. [6]
[4] cfr.[10]
[5] cfr. [12]
[6] cfr. [1]
[7] cfr. [7]
[8] cfr. [16]
[9] cfr. [11]
[10] cfr. [4]
[11] cfr. [2]
[12] cfr. [3]

1. ESISTENZA DI UN EQUILIBRIO DEMOGRAFICO ASINTOTICO

Il teorema dell'equilibrio demografico asintotico, la cui dimostrazione utilizza la teoria spettrale delle matrici nonnegative, e che consente di individuare l'esistenza di una distribuzione asintotica della popolazione per classi d'età, è il presupposto per lo studio di un sistema pensionistico gestito con la logica del sistema finanziario della ripartizione pura e con calcolo contributivo della prestazione.

Partendo dal modello classico di Lesile si considera la popolazione suddivisa in N gruppi di età, essendo $N \in \mathbf{N}$ ed essendo $x_i(t)$ il numero di individui di età compresa nell'intervallo $[i, i+1)$, con $i = 0, 1, ..., N-1$. Il tasso medio di natalità è $\alpha_i \geq 0$ e la probabilità di sopravvivenza tra le classi di età i e i+1 è $0 < \omega_i < 1$. Il vettore di stato della popolazione è dato da:

$$x(t) = [x_0(t), x_1(t), ..., x_{N-1}(t)]^T \ .$$

La matrice di Leslie è la seguente

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & ... & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} \\ \omega_0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & & \omega_{N-2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$x(t+1) = L\, x(t) \ \ (t = 0, 1, 2, \ ...)$ è la dinamica della popolazione descritta da Lesile già nel 1945[13]. Adattiamo questo modello dinamico alla popolazione italiana, considerando di prendere a riferimento i dati dell'Istituto Italiano di Statistica ISTAT.

Consideriamo quindi che $i = 0, 1, ..., 109$, anche se si prevede che i prossimi dati Istat avranno come limite superiore non più 110 ma 116, e che $x^F(t)$ e $x^M(t)$, i vettori di stato della popolazione femmine e maschi, siano di dimensione 110. Per la popolazione femminile vanno considerati i parametri tasso di fertilità per mille f_i e tasso di mortalità q_i^F.

La relazione tra il tasso di natalità e quello di fertilità è: $\alpha_i = \dfrac{f_i}{1000}$.

La quota di femmine alla nascita rispetto alla popolazione totale in un fissato anno t è pari a:

$$\varphi = \frac{x_0^F(t)}{x_0^F(t) + x_0^M(t)} = \frac{x_0^F(t)}{x_0(t)}.$$

Il tasso di natalità $\alpha_i^F = \dfrac{f_i}{1000}\varphi$, considerando le donne riproduttive tra i 15 e i 50 anni, ha $i = 15, ..., 50$ ed è pari a 0 per i gruppi di età fuori da questa fascia, mentre il tasso di sopravvivenza delle femmine è $\omega_i^F = 1 - q_i^F$ ($i = 0, 1, ..., 109$).

La 110×110 matrice di Lesile, riferita alla popolazione femminile, è:

[13] cfr. [14], [15]

$$L^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha^F{}_{15} & \dots & \alpha^F{}_{50} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_0^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \omega_{108}^F & 0 \end{bmatrix}.$$

La dinamica della sottopopolazione femminile, con la logica di Lesile, è:
$x^F(t+1) = L^F x^F(t) \quad (t = 0, 1, 2, \ \dots)$.
La 110×110 matrice di Leslie per la sottopopolazione maschile è:

$$L^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_0^M & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^M & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \omega_{108}^M & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando il vettore base di dimensione 110, $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, la dinamica della sottopopolazione maschile in forma vettoriale è $x^M(t+1) = L^M x^M(t) + \dfrac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 \circ L^F x^F(t)$, dove $\circ$ indica il prodotto di Hadamard.
Per l'intera popolazione, considerando il vettore di stato $x = \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix}$, abbiamo la seguente dinamica:
$x(t+1) = \Lambda x(t) \qquad (t = 0, 1, 2, \ \dots)$,
dove la matrice blocco Λ 220×220 è definita nel seguente modo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L^F & 0 \\ d & 0 \\ 0 & L_1^M \end{bmatrix}$$

In Λ d e L_1^M indicano rispettivamente la riga a 109 dimensioni del vettore
$d = [0 \quad \dots \quad 0 \quad (1-\varphi)\alpha_{15} \quad \dots \quad (1-\varphi)\alpha_{50} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$
e la matrice 109×110

$$L_1^M = \begin{bmatrix} \omega_0^M & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^M & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \omega_{108}^M & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice riferita all'intera popolazione non soddisfatta le condizioni della teoria di Perron Frobenius delle matrici nonnegative, primitive ed irriducibili. Tali condizioni sono invece soddisfatte dalla sottomatrice corrispondente alla sottopopolazione delle femmine per la quale si dimostra quindi l'esistenza di un equilibrio demografico asintotico. Si verifica poi che è possibile estendere tale risultato all'intera popolazione dimostrando il seguente teorema:

Teorema 1: esiste un equilibrio demografico, cioè uno stato x^0 della popolazione tale che x^0 è un autovettore nonnegativo della matrice Λ con autovalore associato λ_0 positivo. Per questo la distribuzione d'età nella popolazione, a lungo andare, tende ad uno stato di equilibrio nel senso che per ogni stato iniziale $x(0)$ esiste un numero $s > 0$ tale che

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = sx^0 .$$

Sulla base di tale risultato si è costruita prima la dinamica della popolazione italiana al 2050 per confrontarla con quella Istat e si sono poi estesi i risultati per verificarne graficamente la stabilità nel lungo periodo, ottenendo le seguenti rappresentazioni:

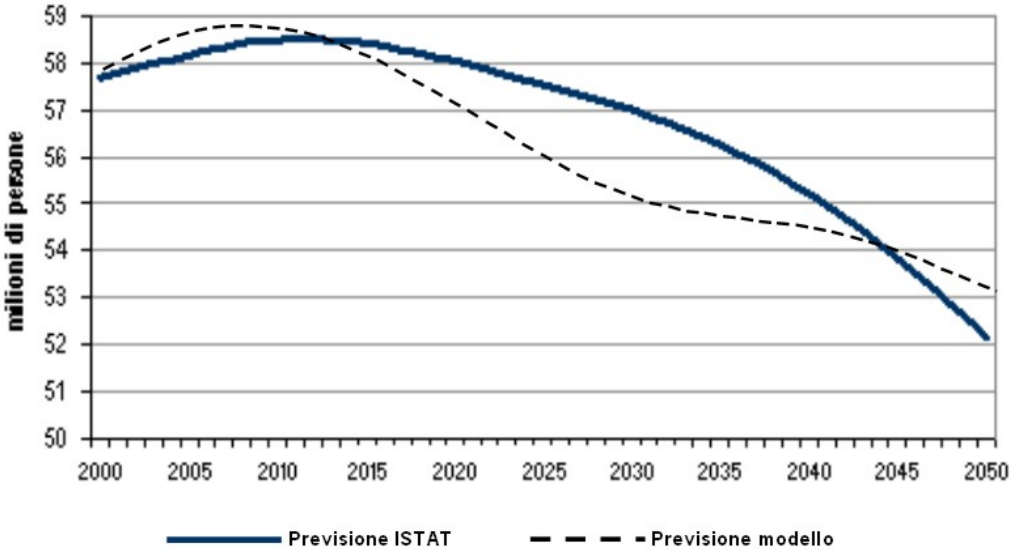

Grafico 1*: confronto della dinamica della popolazione con le previsioni ISTAT al 2050.*

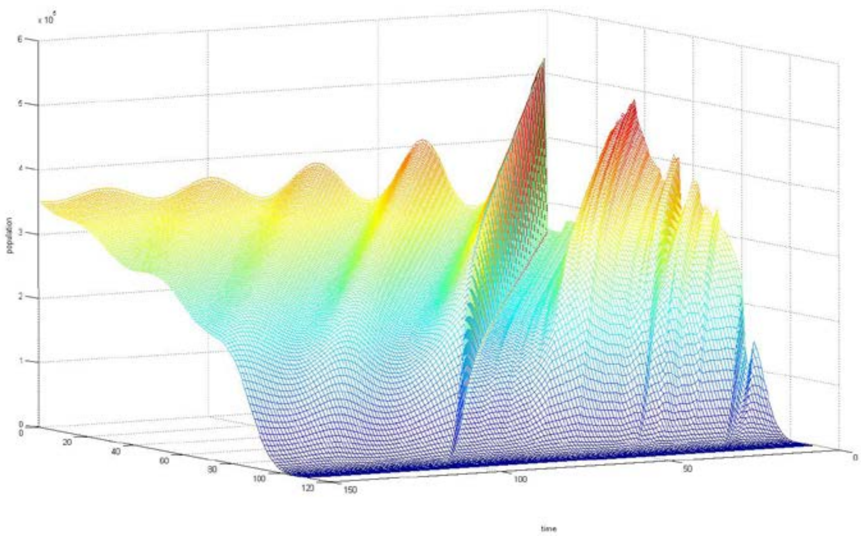

Grafico 2*: previsioni della dinamica della popolazione a 150 anni – stabilizzazione*

Considerando che[14]:

- l'Istat per stimare la dinamica della popolazione utilizza il metodo Holt-Winters che, come abbiamo detto, è una generalizzazione del metodo dello spianamento esponenziale;
- dei tre scenari che rispecchiano la linea direttiva e strategica dell'Eurostat, l'Istat utilizza quello centrale con una previsione del miglioramento del livello di sopravvivenza stimato nel 2030 a 81,4 anni per i maschi e a 88,1 anni per le femmine[15];
- per la stima della speranza di vita alla nascita l'Istat utilizza il modello di Lee-Carter.

Nel confrontare, come si evidenzia dal grafico 1, la dinamica della popolazione secondo il modello Istat con quella del presente modello, si riscontra una differenza pari a circa il 2%, con alcune oscillazioni tipiche di queste modellizzazioni. Il grafico 2, che evidenzia il comportamento asintotico, mostra una flessione consistente intorno al 2060 ma, come si può constatare dall'andamento negli anni successivi, si tratta di un fatto contingente e non strutturale.

Alla luce di tutto questo utilizziamo il teorema suddetto per esplicitare condizioni dinamiche di equilibrio di tipo attuariale, in ambito pensionistico, partendo da condizioni dinamiche di equilibrio di natura demografica. Vogliamo in altre parole sfruttare la consapevolezza, matematicamente dimostrata, sull'andamento nel lungo periodo delle caratteristiche d'evoluzione e stabilità della popolazione per cercare strumenti attuariali che consentano scelte consapevoli rispetto alla futura erogazione pensionistica nel sistema previdenziale italiano gestito a ripartizione e con calcolo contributivo della prestazione.
Come si vedrà inseguito, sarà possibile estendere il ragionamento ad un qualunque sistema a ripartizione di tipo contributivo semplicemente modificando i contingenti di attivi e pensionati in funzione delle legislazioni presenti in ogni paese (età di pensionamento, regole per l'invalidità è l'inabilità, diritti previsti per la pensione indiretta e di reversibilità …..)

2. STRUTTURA DELLA POPOLAZIONE ATTIVA E PENSIONATA IN ITALIA

Consideriamo la popolazione italiana divisa tra attivi e pensionati.
$l_i^F(h,t)$ è il numero delle donne attive di età i al tempo t, con h anni di anzianità di servizio, con h che va da 1 a H, considerando H il numero massimo di anni di servizio possibile. Ovviamente $l_i^F(h,t)=0$, se $0 \le i \le h+15$ [16] o $65 \le i \le 109$.
Nell'ipotesi di non avere nuove occupate nell'anno t e che nessun occupata perda o lasci il lavoro, si ha la seguente uguaglianza, o meglio la seguente equazione di bilancio delle attive

$$l_{i+1}^F(h+1,t+1) = l_i^F(h,t)\omega_i^F - {}_{dir}^{nuo}P_i^F(h,t) - {}_{inv}^{nuo}P_i^F(h,t),$$

dove ${}_{dir}^{nuo}P_i^F(h,t)$ è, all'anno t, il numero delle nuove pensionate d'anzianità o vecchiaia, cioè pensionate dirette, di età i, con h anni di servizio e ${}_{inv}^{nuo}P_i^F(h,t)$ è il numero delle nuove pensionate d'invalidità ed inabilità con gli stessi parametri di età e anzianità. Ovviamente i due termini ${}_{dir}^{nuo}P_i^F(h,t)$ e ${}_{inv}^{nuo}P_i^F(h,t)$ sono uguali a zero per $h<5$ [17].

[14] cfr. [13],
[15] Gli scenari alternative di Eurostat sono uno di scarsa crescita economica con una aspettativa di vita stimata al 2030 a 78,8 anni per i maschi e a 85,4 anni per le femmine, ed uno di vivace crescita economica che fa "schizzare" questi valori, alla stessa epoca, rispettivamente a 84 e a 90,4 anni.
[16] In Italia l'obbligo scolastico è fissato oggi a 15 anni (L. n° 9/1999); tale obbligo, a seguito della L. n° 53/2003 e del successivo decreto 2004, sarà portato in modo graduale a 18 anni.
[17] Secondo la legge italiana che prevede almeno 5 anni di servizio per poter percepire una pensione.

L’ipotesi è quella di considerare come una sola voce le pensioni d’anzianità e vecchiaia, valutandole complessivamente e, analogamente, per quelle d’invalidità ed inabilità che si riferiscono alle regole ed ai vincoli previsti per la pensione ordinaria privilegiata d’inabilità. Questo ovviamente con lo scopo di snellire il modello ma anche nella considerazione che per vecchiaia e anzianità si possono “sommare” le regole per i trattamenti, poiché il loro peso complessivo può essere considerato, senza incorrere in grave errore, non lontano dal loro singolo peso effettivo e per l’assegno ordinario e privilegiato di invalidità può essere considerato come un’inabilità ridotta[18] e la sola differenza sostanziale è la non reversibilità ai superstiti, della quale per altro non ci occupiamo in questo lavoro.

Indichiamo con $\tau_i^F(t)$ il tasso di prima occupazione all’epoca t per le attive d’età i, che risulta essere $\tau_i^F(t)=0$ sia se $0 \le i \le 15$ che se $65 \le i \le 109$. Il vettore dei tassi di prima occupazione è $\tau^F(t)=(\tau_0^F(t),\ \tau_1^F(t),\ \dots,\ \tau_{109}^F(t))$.

Il vettore della popolazione femmine è, come precedentemente indicato, $x^F(t)$, quindi il vettore delle nuove occupate all’anno t è:

$${}^{nuo}l^F(t)=x^F(t)\circ\tau^F(t).$$

Se supponiamo che non ci sia possibilità di lasciare o di perdere il lavoro e indichiamo con ${}^{nuo}P_i^F(h,t)={}^{nuo}_{dir}P_i^F(h,t)+{}^{nuo}_{inv}P_i^F(h,t)$ otteniamo:

per $h=1$ $\quad l_{i+1}^F(1,t+1)={}^{nuo}l_i^F(t)\omega_i^F$,

e per $h>1$ $\quad l_{i+1}^F(h+1,t+1)=l_i^F(h,t)\omega_i^F-{}^{nuo}P_i^F(h,t)$.

Per la popolazione maschile il ragionamento è assolutamente analogo e dunque la dinamica nei due casi è la seguente:

$l_{i+1}^M(1,t+1)={}^{nuo}l_i^M(t)\omega_i^M$, per $h=1$

$l_{i+1}^M(h+1,t+1)=l_i^M(h,t)\omega_i^M-{}^{nuo}P_i^M(h,t)$, per $h>1$.

Indichiamo con $\gamma_i(h,t)$ il tasso di pensionamento diretto all’età i con h anni di servizio. Volendo calcolare il numero dei nuovi pensionati per entrambi i sessi, bisogna considerare che, per il sistema pensionistico italiano, per percepire la pensione diretta d’anzianità o vecchiaia deve essere $h \ge 35$, e l’età i deve essere tale che $57 \le i \le 65$, dove ovviamente $\gamma_{65}(h,t)=1$.

Si ha dunque rispettivamente: ${}^{nuo}_{dir}P_i^F(h,t)=\gamma_i(h,t)\,l_i^F(h,t)$, ${}^{nuo}_{dir}P_i^M(h,t)=\gamma_i(h,t)\,l_i^M(h,t)$.

Il numero totale dei nuovi pensionati diretti è: ${}^{nuo}_{dir}P_i(h,t)={}^{nuo}_{dir}P_i^F(h,t)+{}^{nuo}_{dir}P_i^M(h,t)$.

Se sommiamo rispetto agli anni di servizio, otteniamo il numero dei nuovi pensionati diretti di età i per entrambi i sessi:

$${}^{nuo}_{dir}P_i^F(t)=\sum_{h=1}^{H}{}^{nuo}_{dir}P_i^F(h,t),\quad {}^{nuo}_{dir}P_i^M(t)=\sum_{h=1}^{H}{}^{nuo}_{dir}P_i^M(h,t).$$

Il corrispondente totale è il seguente:

$${}^{nuo}_{dir}P_i(t)={}^{nuo}_{dir}P_i^F(t)+{}^{nuo}_{dir}P_i^M(t).$$

La dinamica ricorrente per i vecchi pensionati diretti di età i nell’anno t, per entrambi i sessi è:

$${}^{vec}_{dir}P_{i+1}^F(t+1)=\left({}^{vec}_{dir}P_i^F(t)+{}^{nuo}_{dir}P_i^F(t)\right)\omega_i^F,\quad {}^{vec}_{dir}P_{i+1}^M(t+1)=\left({}^{vec}_{dir}P_i^M(t)+{}^{nuo}_{dir}P_i^M(t)\right)\omega_i^M.$$

La corrispondente formula per il totale dei vecchi pensionati diretti è:

$${}^{vec}_{dir}P_i(t)={}^{vec}_{dir}P_i^F(t)+{}^{vec}_{dir}P_i^M(t).$$

[18] La pensione d’inabilità è concessa a chi si trova nell’assoluta e permanente impossibilità di svolgere qualsiasi attività lavorativa, quella d’invalidità a chi ha una capacità lavorativa ridotta in modo permanente a meno di un terzo.

Il totale dei pensionati diretti di età i all'anno t è dato da:
${}_{dir}P_i(t) = {}^{nuo}_{dir}P_i(t) + {}^{vec}_{dir}P_i(t)$.

Per la componente delle nuove pensionate e dei nuovi pensionati d'invalidità e d'inabilità, essendo ψ_i^F la probabilità di una attiva d'invalidarsi o inabilitarsi, ψ_i^M la corrispondente probabilità per i maschi e considerando che $5 \leq h < 65$, si ha rispettivamente:
${}^{nuo}_{inv}P_{i+1}^{\,F}(h,t+1) = l_i^F(h,t)\omega_i^F\psi_i^F$, ${}^{nuo}_{inv}P_{i+1}^{\,M}(h,t+1) = l_i^M(h,t)\omega_i^M\psi_i^M$.
Per l'anno seguente e quindi per la classe d'età $i+1$ bisogna considerare anche la probabilità media $\overline{\omega}_i^F$ e $\overline{\omega}_i^M$ di sopravvivenza di una invalida/o (e inabile) dalla classe di età i alla successiva, ovviamente diversa da quella della popolazione generale. Per tutti e due i sessi si ha dunque:
${}^{vec}_{inv}P_{i+1}^{\,F}(h,t+1) = [{}^{vec}_{inv}P_i^F(h,t) + {}^{nuo}_{inv}P_i^F(h,t)]\overline{\omega}_i^F$, ${}^{vec}_{inv}P_{i+1}^{\,M}(h,t+1) = [{}^{vec}_{inv}P_i^M(h,t) + {}^{nuo}_{inv}P_i^M(h,t)]\overline{\omega}_i^M$
Il corrispondente totale di femmine e maschi, sommando rispetto all'anzianità è
${}^{nuo}_{inv}P_i^{\,F}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{inv}P_i^{\,F}(h,t)$, ${}^{nuo}_{inv}P_i^{\,M}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{inv}P_i^{\,M}(h,t)$ e, sommando per sessi si ha che,
${}^{nuo}_{inv}P_i(t) = {}^{nuo}_{inv}P_i^F(t) + {}^{nuo}_{inv}P_i^M(t)$.

In modo analogo per i vecchi pensionati d'invalidità ed inabilità femmine e maschi sommando rispetto all'anzianità si ottiene rispettivamente:
${}^{vec}_{inv}P_i^{\,F}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{vec}_{inv}P_i^{\,F}(h,t)$, ${}^{vec}_{inv}P_i^{\,M}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{vec}_{inv}P_i^{\,M}(h,t)$.
Sommando per i sessi la formula è:
${}^{vec}_{inv}P_i(t) = {}^{vec}_{inv}P_i^F(t) + {}^{vec}_{inv}P_i^M(t)$.
Il totale dei pensionati d'invalidità e d'inabilità d'età i all'anno t è dato dunque da:
${}_{inv}P_i(t) = {}^{nuo}_{inv}P_i(t) + {}^{vec}_{inv}P_i(t)$.

A questo punto è necessario individuare le rimanenti figure pensionistiche che sono quelle dei pensionati indiretti, vale a dire da attivo che muore, e dei pensionati di reversibilità, in altre parole da pensionato che muore. Questi due contingenti sono ovviamente i più complessi perchè oltre a dover considerare la probabilità che un attivo o un pensionato che muore lasci famiglia, è necessario focalizzare l'attenzione sulla composizione dei nuclei familiari superstiti (che in genere per le pensioni indirette comprendono coniuge e figli e per la reversibilità solo il coniuge e, in entrambi i casi, molto raramente, genitori, fratelli e sorelle). Considerando quindi che tali tipi di pensione sono godute in prevalenza da vedovi e vedove, sarebbe necessario tenere conto anche della probabilità di nuzialità (con un nuovo matrimonio si perde il diritto alla pensione indiretta e di reversibilità) e della probabilità di sopravvivenza di questi, notoriamente diversa, soprattutto per i vedovi, da quella della popolazione generale.

Per semplificare il modello trattiamo esclusivamente la componente dei vedovi e delle vedove. Questo perché in primo luogo è quella più consistente del nucleo familiare superstite in quanto, nelle pensioni di reversibilità difficilmente ci sono i minori e nelle pensioni indirette, decisamente inferiori per numero rispetto alla reversibilità, qualora i minori siano presenti, percepiscono un importo di pensione decisamente inferiore a quello del coniuge. Inoltre, per quanto riguarda la componente dei genitori e dei fratelli e sorelle, questa si può considerare assolutamente irrilevante a livello nazionale.

Non consideriamo inoltre il caso che un vedovo o una vedova contragga nuovo matrimonio, poiché appesantirebbe il modello senza una reale giustificazione, essendo i casi molto rari (non si rinuncia a cuor leggero ad una pensione indiretta o di reversibilità, soprattutto se d'importo consistente).

Consideriamo quindi preliminarmente il caso delle pensioni indirette.

$$ {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(h,t) = \sum_{i=16}^{64} l_i^F(h,t-1)(1-\omega_i^F)\,{}^{ved}_{\ k}\theta_i^F \qquad (1)$$

dove k è l'età del vedovo e ${}^{ved}_{\ k}\theta_i^F$ è la probabilità che un'attiva di età i lasci un vedovo di età k.

Analogamente per l'altro sesso

$$ {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(h,t) = \sum_{i=16}^{64} l_i^M(h,t-1)(1-\omega_i^M)\,{}^{ved}_{\ k}\theta_i^M \ .$$

Sommando per sesso si ha:

$$ {}^{nuo}_{ind}P_k\ (h,t) = {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(h,t) + {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(h,t) \ .$$

Sommando rispetto all'anzianità di servizio del dante causa e ricordando che questa deve essere ≥ 5 si ha rispettivamente:

$$ {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(h,t)\,,\quad {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(h,t)\,,\ \text{da cui}\ \ {}^{nuo}_{ind}P_k(t) = {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(t) + {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(t)\,.$$

I vecchi pensionati indiretti, indicando con ${}^{ved}\omega_k^F$ e ${}^{ved}\omega_k^M$ le probabilità di sopravvivenza delle vedove e dei vedovi, sono rispettivamente pari a:

$$ {}^{vec}_{ind}P_{k+1}^{\ \ F}(t+1) = [{}^{vec}_{ind}P_k^F(t) + {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ F}(t)]\,{}^{ved}\omega_k^F \ ,\quad {}^{vec}_{ind}P_{k+1}^{\ \ M}(t+1) = [\ {}^{vec}_{ind}P_k^M(t) + {}^{nuo}_{ind}P_k^{\ M}(t)]\,{}^{ved}\omega_k^M \ .$$

L a corrispondente formula per il totale dei vecchi pensionati indiretti è:

$$ {}^{vec}_{ind}P_k(t) = {}^{vec}_{ind}P_k^{\ F}(t) + {}^{vec}_{ind}P_k^{\ M}(t) \ .$$

Il totale dei pensionati indiretti d'età k all'anno t è dato da:

$$ {}_{ind}P_k(t) = {}^{nuo}_{ind}P_k(t) + {}^{vec}_{ind}P_k(t) \ .$$

Per quanto attiene alle pensioni di reversibilità, ferme restando le ipotesi preliminarmente formulate, indicando con ${}^{ved}_{\ k}\theta_i^F$ e ${}^{ved}_{\ k}\theta_i^M$ la probabilità che una pensionata o un pensionato d'età i lasci un vedovo/a di età k, possiamo individuare le nuove pensionate di reversibilità femmine e i nuovi pensionati di reversibilità maschi:

$$ {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(h,t) = \sum_{i=65}^{109} {}_{dir}P_i^M(h,t-1)(1-\omega_i^M)\,{}^{ved}_{\ k}\theta_i^M \quad , \quad {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(h,t) = \sum_{i=65}^{109} {}_{dir}P_i^F(h,t-1)(1-\omega_i^F)\,{}^{ved}_{\ k}\theta_i^F \ .$$

Il totale dei nuovi pensionati di reversibilità è:

$$ {}^{nuo}_{rev}P_k\ (h,t) = {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(h,t) + {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(h,t) \ .$$

Sommando rispetto all'anzianità di servizio del dante causa si ha rispettivamente:

$$ {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(h,t)\ \text{e}\ \ {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(t) = \sum_{h=1}^{H} {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(h,t)\,,\ \text{da cui}\ \ {}^{nuo}_{rev}P_k(t) = {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(t) + {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(t)$$

Considerando invece i vecchi pensionati di reversibilità in modo ricorsivo, per entrambi i sessi si ha:

$$ {}^{vec}_{rev}P_{k+1}^{\ \ F}(t+1) = [{}^{vec}_{rev}P_k^F(t) + {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ F}(t)]\,{}^{ved}\omega_k^F \ \text{e}\ \ {}^{vec}_{rev}P_{k+1}^{\ \ M}(t+1) = [{}^{vec}_{rev}P_k^M(t) + {}^{nuo}_{rev}P_k^{\ M}(t)]\,{}^{ved}\omega_k^F \ .$$

L a corrispondente formula per il totale dei vecchi pensionati di reversibilità è:

$$ {}^{vec}_{rev}P_k(t) = {}^{vec}_{rev}P_k^{\ F}(t) + {}^{vec}_{rev}P_k^{\ M}(t) \ .$$

Il totale dei pensionati di reversibilità di età k all'anno t è dunque dato da:

$$ {}_{rev}P_k(t) = {}^{nuo}_{rev}P_k(t) + {}^{vec}_{rev}P_k(t) \ .$$

E’ quindi a questo punto possibile esprimere il contingente totale dei pensionati, per ogni età *k*, come la somma dei singoli contingenti riferiti ai pensionati diretti, d’invalidità ed inabilità, indiretti e di reversibilità, come segue:

$$P_k(t) = {}_{dir}P_k(t) + {}_{inv}P_k(t) + {}_{ind}P_k(t) + {}_{rev}P_k(t) .$$

3. UN’ALIQUOTA CONTRIBUTIVA FLESSIBILE

In Italia coloro che sono andati e andranno in pensione con il calcolo effettuato su base retributiva, cioè con le regole ante legge 335/95, hanno la garanzia di una pensione che, raggiunti tutti i requisiti massimi, è pari circa all’88% della loro ultima retribuzione e ciò, nella garanzia del mantenimento del tenore di vita, ha condotto ad uno squilibrio finanziario strutturale. Questo a fronte di un’aliquota contributiva, per il fondo pensioni lavoratori dipendenti, che è passata dal 14,1% del 1960 all’attuale 32,70%[19], di cui l’8,89% grava direttamente sul salario del lavoratore ed il rimanente è a carico del datore di lavoro. Si stima che le generazioni che si pensioneranno con il sistema del pro-rata (calcolo della pensione parte con metodo retributivo, parte con metodo contributivo) godranno, a fronte di una stessa aliquota, di un tasso di sostituzione tra il 47% e il 72%.

Tale percentuale scende drasticamente tra il 31% ed il 40% a regime della 335/95 con una medesima aliquota contributiva detratta nel corso della vita lavorativa (si stima che l’aliquota resterà invariata almeno fino al 2013)[20].

Vogliamo in quest’ottica, ma tenendo conto dell’equilibrio demografico asintotico in precedenza indicato, individuare un’aliquota contributiva flessibile che sia di garanzia per un “tasso di sostituzione adeguato” alle esigenze della popolazione dei pensionati.

Supponiamo che $\overline{R}_i(h,t)$ è il salario medio di un individuo d’età i nell’anno *t*, con h anni d’anzianità di servizio, $\alpha(t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)$ è l’aliquota contributiva corrispondente all’anno *t*, dove $\alpha_0(t)$ è la parte spettante al lavoratore e $\alpha_1(t)$ è quella spettante al datore di lavoro. Quindi, sempre all’anno t, l’ammontare totale delle retribuzioni è pari a:

$$T(t) = \sum_{i,h} \left[l_i^F(h,t) + l_i^M(h,t) \right] \overline{R}_i(h,t) ,$$

da cui è possibile calcolare l’ammontare totale dei contributi $C(t) = \alpha(t)T(t)$.

Ora, indicando con $c_i(t)$ i coefficienti di trasformazione della legge Dini per l’età *i* e l’anno *t* e con r_k il tasso annuo di capitalizzazione calcolato come media geometrica quinquennale del PIL nominale all’anno *k*[21], la prestazione media di un pensionato che va in quiescenza all’anno t, dopo h anni di anzianità di servizio e zero anni di anzianità pensionistica, ipotizzando che i contributi siano valutati alla fine dell’anno e le pensioni siano pagate all’inizio dell’anno, è:

per le pensioni dirette

$${}_{dir}^{0}\overline{\pi}_i(h,t) = \sum_{0<J\le h} c_i(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) ,$$

per le pensioni d’invalidità e d’inabilità

$${}_{inv}^{0}\overline{\pi}_i(h,t) = \sum_{0<J\le h} c_i(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) ,$$

---

[19] L’aliquota di computo è in realtà del 33%.

[20] Queste percentuali sono pubblicate dalla Commissione Ministeriale per la valutazione della 335/95, cfr. [9].

[21] Si riportano in appendice i valori dei $c_i(t)$ e delle r_k .

per le pensioni indirette

$$ {}_{ind}^{\;0}\overline{\pi}_i(h,t) = 0{,}6 \sum_{0<J\le h} c_i(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) $$

(dove $\overline{R}_{i-J}(h-J,t-J)$ è la retribuzione media del dante causa),

per le pensioni di reversibilità

$$ {}_{rev}^{\;0}\overline{\pi}_i(h,t) = 0{,}6\,{}_{dir}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t)\,. $$

Più genericamente, indicando con r'_k il tasso di rivalutazione delle pensioni all'anno k e con ν il numero degli anni di pensione, per ogni $\nu \ge 0$, si ha per tutti i tipi di pensione rispettivamente:

per le dirette

$$ {}_{dir}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t) = \left(\sum_{0<J\le h} c_{i-\nu}(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-\nu-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) \right) \prod_{t-\nu<k\le t}(1+r'_k)\,, $$

per l'invalidità e l'inabilità

$$ {}_{inv}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t) = \left(\sum_{0<J\le h} c_{i-\nu}(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-\nu-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) \right) \prod_{t-\nu<k\le t}(1+r'_k)\,, $$

per le indirette

$$ {}_{ind}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t) = \left(0{,}6 \sum_{0<J\le h} c_{i-\nu}(t)\alpha(t-j)\overline{R}_{i-\nu-J}(h-J,t-J) \prod_{t-J<k<t}(1+r_k) \right) \prod_{t-\nu<k\le t}(1+r'_k)\,, $$

per le reversibilità

$$ {}_{rev}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t) = {}_{rev}^{\;0}\overline{\pi}_i(h,t) \prod_{t-\nu<k\le t}(1+r'_k)\,. $$

Il numero delle pensionate e dei pensionati al tempo t, di età i, con h anni di anzianità di servizio e ν anni di anzianità pensionistica è, per femmine e maschi, rispettivamente pari a:

per le dirette

$$ {}_{dir}^{\;\nu}P^F_i(h,t) = {}_{dir}^{\;0}P^F_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} \omega^F_i \;,\quad {}_{dir}^{\;\nu}P^M_i(h,t) = {}_{dir}^{\;0}P^M_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} \omega^M \;, $$

per l'invalidità e l'inabilità

$$ {}_{inv}^{\;\nu}P^F_i(h,t) = {}_{inv}^{\;0}P^F_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{inv}\omega^F_i \;,\quad {}_{inv}^{\;\nu}P^M_i(h,t) = {}_{inv}^{\;0}P^M_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{inv}\omega^M_i \;, $$

per le indirette

$$ {}_{ind}^{\;\nu}P^F_i(h,t) = {}_{ind}^{\;0}P^F_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega^F_i \;,\quad {}_{ind}^{\;\nu}P^M_i(h,t) = {}_{ind}^{\;0}P^M_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega^M_i \;, $$

per le reversibilità

$$ {}_{rev}^{\;\nu}P^F_i(h,t) = {}_{rev}^{\;0}P^F_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega^F_i \;,\quad {}_{rev}^{\;\nu}P^M_i(h,t) = {}_{rev}^{\;0}P^M_{i-\nu}(h,t-\nu) \prod_{j=1-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega^M_i \;. $$

All'anno t l'ammontare totale delle pensioni dirette, d'invalidità e d'inabilità, indirette e di reversibilità, rispettivamente è il seguente:

$$ {}_{dir}^{\;\nu}\pi_i(h,t) = {}_{dir}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t)\left({}_{dir}^{\;\nu}P^F_i(h,t) + {}_{dir}^{\;\nu}P^M_i(h,t) \right), $$

$$ {}_{inv}^{\;\nu}\pi_i(h,t) = {}_{inv}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t)\left({}_{inv}^{\;\nu}P^F_i(h,t) + {}_{inv}^{\;\nu}P^M_i(h,t) \right), $$

$$ {}_{ind}^{\;\nu}\pi_i(h,t) = {}_{ind}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t)\left({}_{ind}^{\;\nu}P^F_i(h,t) + {}_{ind}^{\;\nu}P^M_i(h,t) \right), $$

$$ {}_{rev}^{\;\nu}\pi_i(h,t) = {}_{rev}^{\;\nu}\overline{\pi}_i(h,t)\left({}_{rev}^{\;\nu}P^F_i(h,t) + {}_{rev}^{\;\nu}P^M_i(h,t) \right). $$

Nel caso di α costante, r_k, r'_k indipendenti da k, ponendo $\overline{R}_i(h,t) = d_{i,h}(1+q)^t$, sommando rispetto l'età, l'anzianità in pensione e l'anzianità in servizio si ha:

$$\pi_{dir}(t) = \alpha \sum_{i=57}^{109} \sum_{\nu=0}^{i-57} \sum_{h=1}^{H} \left[(1+r')^{\nu} \sum_{0<J\le h} c_i(t) d_{i-\nu-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}_{dir}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \omega_j^F + {}_{dir}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \omega_j^M \right]$$

$$\pi_{inv}(t) = \alpha \sum_{i=16}^{64} \sum_{\nu=0}^{i-16} \sum_{h=1}^{H} \left[(1+r')^{\nu} \sum_{0<J\le h} c_i(t) d_{i-\nu-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}_{inv}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{inv}\omega_j^F + {}_{inv}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{inv}\omega_j^M \right]$$

$$\pi_{ind}(t) = \alpha \sum_{i=16}^{64} \sum_{\nu=0}^{i-16} \sum_{h=1}^{H} \left[(1+r')^{\nu} \sum_{0<J\le h} c_i(t) d_{i-\nu-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}_{ind}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega_j^F + {}_{ind}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega_j^M \right]$$

$$\pi_{rev}(t) = \alpha \sum_{i=57}^{109} \sum_{\nu=0}^{i-57} \sum_{h=1}^{H} \left[{}_{rev}^{\;\,0}\overline{\pi}_i(h,t)(1+r')^{\nu} \right] \left[{}_{rev}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega_j^F + {}_{rev}^{\;\,0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu) \prod_{j=i-\nu}^{i-1} {}^{ved}\omega_j^M \right].$$

L'ammontare totale delle pensioni all'anno t sarà pari a:

$$\pi(t) = \pi_{dir}(t) + \pi_{inv}(t) + \pi_{ind}(t) + \pi_{rev}(t).$$

Tornando al nostro problema originale, supponiamo che in un sistema pensionistico gestito a ripartizione pura il limite del rapporto tra tutte le voci pensionistiche e l'ammontare totale dei salari netti ricevuti sia uguale ad un valore A dato cioè, nell'equilibrio demografico, sia:

$$\frac{1}{(1-\alpha_0)} \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} = A, \tag{2}$$

dove $\left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} := \lim_{t\to\infty} \frac{\pi(t)}{T(t)}$.

Si tratta quindi di calcolare la componente α_0 dell'aliquota contributiva, dimostrando l'esistenza del limite indicato e di tutti quelli che seguono.

Per riferirci all'equilibrio demografico trasformiamo il rapporto $\left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty}$ come segue:

$$\left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} = \left(\frac{\frac{\pi(t)}{\lambda_0^t}}{\frac{T(t)}{\lambda_0^t}} \right)_{\infty} = A(1-\alpha_0),$$

che è equivalente a:

$$\left(\frac{\pi(t)}{\lambda_0^t} \right)_{\infty} = A(1-\alpha_0) \left(\frac{T(t)}{\lambda_0^t} \right)_{\infty} .$$

L'esistenza di tali limiti è basata sul Teorema 1, ma per poterlo applicare è necessario esprimere il numero dei pensionati, in precedenza esplicitati, in funzione degli attivi.

Supponiamo che, per ogni 15 < i < 65, il tasso di prima occupazione femminile $\tau_i^F(t)$ e maschile $\tau_i^M(t)$ siano costanti nel tempo. Allora, per tutti gli 15 < $i \le 57$, $5 \le h \le i-15$ e t sufficientemente grande, abbiamo, applicando il modello di Lesile, rispettivamente

$$l_i^F(h,t) = \tau_{i-h}^F x_{i-h}^F(t-h)\omega_{i-h}^F\omega_{i-h+1}^F \cdots \omega_{i-1}^F = \tau_{i-h}^F x_i^F(t) \tag{3}$$
$$l_i^M(h,t) = \tau_{i-h}^M x_{i-h}^M(t-h)\omega_{i-h}^M\omega_{i-h+1}^M \cdots \omega_{i-1}^M = \tau_{i-h}^M x_i^M(t)\,. \tag{4}$$

Per 15 < $i \le 57$, $1 \le h \le i-15$, applicando il limite del teorema dell'equilibrio asintotico si ha per le femmine e per i maschi

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{l_i^F(h,t)}{\lambda_0^t} = \tau_{i-h}^F s\, x_i^{0F}\,, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{l_i^M(h,t)}{\lambda_0^t} = \tau_{i-h}^M s\, x_i^{0M}\,.$$

Ora, essendo $57 \le i \le 65$, $35 \le h \le i-15$, supponiamo che la propensione al pensionamento $\gamma_i(h,t)$ sia costante nel tempo, $\gamma_{i,h}$. Procedendo come per la formula (3), un facile calcolo dimostra che con appropriate costanti $g_{i,h}^F$, definite in termini dei parametri del modello τ_{i-h}^F e $\gamma_{i,h}$, abbiamo:

$$l_i^F(h,t) = g_{i,h}^F x_i^F(t)\,,$$

che implica

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{l_i^F(h,t)}{\lambda_0^t} = g_{i,h}^F s\, x_i^{0F}\,. \tag{5}$$

Per i maschi, con analogo ragionamento, procedendo come per la (4), otteniamo

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{l_i^M(h,t)}{\lambda_0^t} = g_{i,h}^M s\, x_i^{0M}\,. \tag{6}$$

Ora, per unificare la notazione per tutte le classi d'età e d'anzianità, cioè per tutti gli 15 < $i \le 57$ e $1 \le h \le i-15$ indichiamo $g_{i,h}^F := \tau_{i-h}^F$ e $g_{i,h}^M := \tau_{i-h}^M$. Inoltre, con la notazione precedente, per

$${}_{dir}^{\;0}P_i^F(h,t) = l_i^F(h,t)\omega_i^F - l_{i+1}^F(h+1,t+1)\,, \tag{7}$$

applicando la (3) otteniamo:

$$\begin{aligned}{}_{dir}^{\;0}P_i^F(h,t) &= g_{i,h}^F x_i^F(t)\omega_i^F - g_{i+1,h+1}^F x_{i+1}^F(t+1)\\ &= g_{i,h}^F x_i^F(t)\omega_i^F - g_{i+1,h+1}^F \omega_i^F x_i^F(t)\\ &= (g_{i,h}^F - g_{i+1,h+1}^F)\omega_i^F x_i^F(t).\end{aligned}$$

Indicando con $\bar{g}_{i,h}^F := (g_{i,h}^F - g_{i+1,h+1}^F)\omega_i^F s$ abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_i^F(h,t)}{\lambda_0^t}=\overline{g}_{i,h}^F x_i^{0F}$$

e, in modo analogo per i maschi, applicando la (4)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_i^M(h,t)}{\lambda_0^t}=\overline{g}_{i,h}^M x_i^{0M}\ .$$

Conseguentemente, per entrambi i sessi, otteniamo

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_{i-\nu}^F(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_{i-\nu}^F(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}\overline{g}_{i,h}^F x_i^{0F}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\overline{g}_{i,h}^F x_i^{0F}\quad \text{e}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_{i-\nu}^M(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{dir}^{0}P_{i-\nu}^M(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}\overline{g}_{i,h}^M x_i^{0F}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\overline{g}_{i,h}^M x_i^{0M}\ ,$$

rispettivamente.

Ora, passando al limite di $\frac{\pi(t)}{T(t)}$ per le pensioni dirette, utilizzando la (5) e la (6) per il denominatore, considerando, per semplicità di calcolo, i coefficienti di trasformazione indipendenti dall'età, e supponendo che esiste il limite $\lim_{t\to\infty}c(t)=c_0$, otteniamo:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\pi_{dir}(t)}{T(t)}=\alpha c_0\frac{\sum_{i=57}^{109}\sum_{\nu=0}^{i-57}\sum_{h=1}^{H}\left[(1+r')^\nu\sum_{0<J\le h}d_{i-\nu-J,h}\frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J}\right]\left[\frac{1}{\lambda_0^\nu}\overline{g}_{i-\nu,h}^F x_i^F\prod_{j=i-\nu}^{i-1}\omega_j^F+\frac{1}{\lambda_0^\nu}\overline{g}_{i-\nu,h}^M x_i^M\prod_{j=i-\nu}^{i-1}\omega_j^M\right]}{\sum_{i,h}[g_{i,h}^F s\, x_i^{0F}+g_{i,h}^M s\, x_i^{0M}]d_{ih}}.$$

Per calcolare l'analogo limite per le pensioni d'invalidità ed inabilità, dobbiamo costruire l'espressione dei pensionati d'invalidità ed inabilità in funzione degli attivi per entrambi i sessi:

$${}_{inv}^{0}P_{i+1}^{F}(h,t+1)=l_i^F(h,t)\omega_i^F\psi_i^F\ ,\ {}_{inv}^{0}P_{i+1}^{M}(h,t+1)=l_i^M(h,t)\omega_i^M\psi_i^M\ .$$

Per tutti gli $15 < i \le 57$, $5 \le h \le i-15$ e t sufficientemente grande, dalle formule (3) e (4) abbiamo:

$${}_{inv}^{0}P_i^F(h,t)=l_i^F(h,t)\omega_i^F\psi_i^F=\tau_{i-h}^F\psi_i^F x_i^F(t)\,,\quad {}_{inv}^{0}P_i^M(h,t)=l_i^M(h,t)\omega_i^M\psi_i^M=\tau_{i-h}^M\psi_i^M x_i^M(t)\,.$$

Applicando il Teorema 1, con un ${}_{inv}g_{i,h}^F$ e ${}_{inv}g_{i,h}^F$ appropriati, si ottiene per i due sessi rispettivamente:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_i^F(h,t)}{\lambda_0^t}=\tau_{i-h}^F\psi_i^F s\, x_i^{0F}={}_{inv}g_{i,h}^F x_i^{0F}\ ,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_i^M(h,t)}{\lambda_0^t}=\tau_{i-h}^M\psi_i^M s\, x_i^{0M}={}_{inv}g_{i,h}^M x_i^{0M}\ ,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}{}_{inv}g_{i,h}^{F}x_i^{0F}\ ,$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{inv}^{0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}{}_{inv}g_{i,h}^{M}x_i^{0M}\ .$$

Il limite del rapporto tra pensione d'invalidità ed inabilità e retribuzioni è il seguente:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\pi_{inv}(t)}{T(t)}=$$
$$=\alpha c_0\,\frac{\displaystyle\sum_{i=16}^{64}\sum_{\nu=0}^{i-57}\sum_{h=1}^{H}\left[(1+r')^{\nu}\sum_{0<J\le h}d_{i-\nu-J,h}\frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^{J}}\right]\left[\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}{}_{inv}g_{i-\nu,h}^{F}x_i^{F}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{inv}\omega_j^{F}+\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}{}_{inv}g_{i-\nu,h}^{M}x_i^{M}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{inv}\omega_j^{M}\right]}{\displaystyle\sum_{i,h}[g_{i,h}^{F}s\,x_i^{0F}+g_{i,h}^{M}s\,x_i^{0M}]d_{ih}}.$$

Considerando le pensioni indirette, riferendoci alla formula (1), otteniamo per entrambi sessi, rispettivamente:

$${}_{ind}^{0}P_k^{F}(h,t)=\sum_{i=16}^{64}l_i^{M}(h,t-1)(1-\omega_i^{M})\,{}_{k}^{ved}\theta_i^{M}=\sum_{i=16}^{64}\tau_{i-h}^{M}\,{}_{k}^{ved}\theta_i^{M}x_i^{M}(t)\ ,$$
$${}_{ind}^{0}P_k^{M}(h,t)=\sum_{i=16}^{64}l_i^{F}(h,t-1)(1-\omega_i^{F})\,{}_{k}^{ved}\theta_i^{F}=\sum_{i=16}^{64}\tau_{i-h}^{F}\,{}_{k}^{ved}\theta_i^{F}x_i^{F}(t)\,.$$

Per le pensioni indirette, con ragionamento analogo al precedente, applicando il Teorema 1, con appropriati ${}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{F}$, ${}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{M}$, dove i diventa l'età del vedovo o della vedova percettore di pensione indiretta e μ è l'età del dante causa al momento della morte da attivo, si ottiene per i due sessi rispettivamente:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{ind}^{0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{ind}^{0}P_{i-\nu}^{F}(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{M}x_{\mu i}^{0M}\ ,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{ind}^{0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{ind}^{0}P_{i-\nu}^{M}(h,t-\nu)}{\lambda_0^{t-\nu}}=\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{F}x_{\mu i}^{0F}\ .$$

Da cui

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\pi_{ind}(t)}{T(t)}=$$
$$=\alpha c_0\,\frac{\displaystyle\sum_{i=16}^{64}\sum_{\nu=0}^{i-57}\sum_{h=1}^{H}\left[(1+r')^{\nu}\sum_{0<J\le h}d_{i-\nu-J,h}\frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^{J}}\right]\left[\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{M}x_{\mu i}^{0M}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{ved}\omega_j^{F}+\frac{1}{\lambda_0^{\nu}}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{ind}^{\,i}g_{\mu,h}^{F}x_{\mu i}^{0F}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{ved}\omega_j^{M}\right]}{\displaystyle\sum_{i,h}[g_{i,h}^{F}s\,x_i^{0F}+g_{i,h}^{M}s\,x_i^{0M}]d_{ih}}.$$

Per completare il modello è necessario esplicitare il limite anche per la pensione di reversibilità. Indicando con ν l'anzianità di pensionamento dei vedovi e delle vedove e con i la loro età, sostituendo la (7), abbiamo

$$ {}_{rev}^{\;\;0}P_k^{\;F}(h,t)=\sum_{i=65}^{109}\sum_{\nu=0}^{44}{}_{dir}^{\;\;\nu}P_i^{\;M}(h,t-1)(1-\omega_i^M)^{ved}_{\;\;k}\theta_i^M=\sum_{i=65}^{109}\sum_{\nu=0}^{44}[l_{i-\nu-1}^F(h,t-\nu-1)\omega_{i-\nu-1}^F-l_{i-\nu}^F(h+1,t-\nu)](1-\omega_i^M)^{ved}_{\;\;k}\theta_i^M . $$

Applicando la (3) e la (4) otteniamo per le femmine e per i maschi rispettivamente

$$ {}_{rev}^{\;\;0}P_{k-\nu}^F(h,t-\nu)=\sum_{i=57}^{109}\sum_{\nu=0}^{44}(g_{i-\nu,h}^M-g_{i-\nu+1,h+1}^M)\omega_{i-\nu}^M x_{i-\nu}^M(t)(1-\omega_{i-\nu}^M)^{ved}_{\;\;k}\theta_{i-\nu}^M , $$

$$ {}_{rev}^{\;\;0}P_{k-\nu}^M(h,t-\nu)=\sum_{i=57}^{109}\sum_{\nu=0}^{44}(g_{i-\nu,h}^F-g_{i-\nu+1,h+1}^F)\omega_{i-\nu}^F x_{i-\nu}^F(t)(1-\omega_{i-\nu}^F)^{ved}_{\;\;k}\theta_{i-\nu}^F . $$

Per la pensione di reversibilità, con un ragionamento analogo al precedente, applicando il Teorema 1, con appropriati ${}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^F$, ${}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^M$, dove i diventa l'età del vedovo o della vedova percettore di pensione di reversibilità e μ è l'età del dante causa al momento della morte da pensionato, si ottiene per i due sessi rispettivamente:

$$ \lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{rev}^{\;\;0}P_{i-\nu}^F(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^M x_{\mu i}^{0M} , $$

$$ \lim_{t\to+\infty}\frac{{}_{rev}^{\;\;0}P_{i-\nu}^M(h,t-\nu)}{\lambda_0^t}=\frac{1}{\lambda_0^\nu}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^F x_{\mu i}^{0F} . $$

Da cui

$$ \lim_{t\to\infty}\frac{\pi_{rev}(t)}{T(t)}= $$

$$ =\alpha c_0\frac{\sum_{i=16}^{64}\sum_{\nu=0}^{i-57}\sum_{h=1}^{H}\left[(1+r')^\nu\sum_{0<J\le h}d_{i-\nu-J,h}\frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J}\right]\left[\frac{1}{\lambda_0^\nu}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^M x_{\mu i}^{0M}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{ved}\omega_j^F+\frac{1}{\lambda_0^\nu}\sum_{\mu=16}^{64}{}_{rev}^{\;\;i}g_{\mu,h}^F x_{\mu i}^{0F}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}{}^{ved}\omega_j^M\right]}{\sum_{i,h}[g_{i,h}^F s\, x_i^{0F}+g_{i,h}^M s\, x_i^{0M}]d_{ih}} . $$

Volendo esplicitare l'aliquota contributiva che si è disposti a versare in percentuale del salario, con lo scopo di ottenere un tasso di sostituzione che si ritiene idoneo alle proprie esigenze al pensionamento, si procede, a partire dalla (2), come segue.

$$ \left(\frac{\pi}{T}\right)_\infty=\left(\frac{\pi_{dir}}{T}\right)_\infty+\left(\frac{\pi_{inv}}{T}\right)_\infty+\left(\frac{\pi_{ind}}{T}\right)_\infty+\left(\frac{\pi_{rev}}{T}\right)_\infty . $$

In questa somma ogni termine contiene il fattore α.

Definiamo $B=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{T}\right)_\infty$ e riscriviamo l'equazione (2)

$\frac{1}{(1-\alpha_0)}\left(\frac{\pi}{T}\right)_\infty=A,$ ricordando che $\alpha=\alpha_0+\alpha_1,$ nella forma

$$ \frac{\alpha_0+\alpha_1}{(1-\alpha_0)}B=A . $$

Esplicitando α_0, otteniamo

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{A - \alpha_1 B}{A + B}}$$

Osserviamo che per $A > \alpha_1 B$ ricaviamo 0< α_0 <1, che è condizione necessaria per un'aliquota.

Questa è l'aliquota contributiva che è corrisposta dagli attivi futuri pensionati con lo scopo di percepire una pensione uguale ad A volte il loro salario, nell'ipotesi che sia raggiunto l'equilibrio demografico.
Nei precedenti calcoli gli ammontari delle pensioni e dei salari sono considerati rispetto al totale della popolazione attiva e pensionata. In modo del tutto analogo il valore di α_0 può essere calcolato riferendosi ad una specifica classe d'attivi e di pensionati.
E' evidente che questo modello consente anche di ipotizzare innalzamenti dell'età pensionabile, e dunque di misurare quanto questa componente incida sul tasso di sostituzione.

CONCLUSIONI

Data l'importanza e la complessità che assume la questione dell'invecchiamento della popolazione in un paese che ha la necessità di pianificare interventi in settori strategici come quello previdenziale si è deciso di partire da uno strumento decisionale collaudato e dunque affidabile, fornito dal teorema dell'equilibrio asintotico demografico, per formulare valutazioni ed ipotesi rispetto al nostro "nuovo" sistema pensionistico governato dalla legge 8 agosto 1995, n°335. Questo perché per intervenire in ambito pensionistico si ha l'assoluta necessità di conoscere la futura consistenza della popolazione con un margine d'errore il più piccolo possibile.

Applicando i risultati del suddetto teorema alla popolazione italiana si è verificato che gli attuali tassi di riproduttività e di sopravvivenza denotano una popolazione strutturalmente e quindi asintoticamente in espansione. Questo in quanto l'autovalore dominante è maggiore di uno e le note previsioni della riduzione demografica della popolazione italiana, per i prossimi anni, sono frutto solamente dell'attuale distribuzione che, in termini dinamici, è assimilabile ad un'"onda"e non alla statica e nota gobba la cui logica rende erroneamente strutturale l'assetto della popolazione.
Tutte le considerazioni sopraesposte rispetto all'aspetto demografico hanno consentito valutazioni sul sistema pensionistico gestito a ripartizione, con calcolo contributivo della prestazione, permettendo di calcolare un'aliquota contributiva che, combinata con ipotesi di innalzamento dell'età pensionabile, consente di delineare una rendita pensionistica caratterizzata dal concetto di "adeguatezza" in riferimento al tasso di sostituzione. Si è potuta in altre parole individuare un'aliquota contributiva flessibile che consente di ridurre, se non addirittura eliminare, l'attuale rischio calcolato di prestazioni pensionistiche lontane dal consentire di mantenere un tenore di vita vicino a quello del periodo lavorativo.

BIBLIOGRAFIA

1. Alvaro G., Pedullà G., Ricci L. (1987). Sull’analisi del sistema pensionistico Italiano e dei trattamenti pensionistici agli inizi del 2000. INPS, Il futuro del sistema pensionistico Italiano, Roma, Italia.

2. Angrisani M. (2002). Equilibrium in a pay-as-you-go system with contributory pension. 27th International Actuary Congress, Cancùn, Mexico.

3. Angrisani, M. (2006). Funded and unfunded systems – two ends of the same stick, 28th International Congress of Actuaries, Parigi, Francia.

4. Angrisani M., Attias A. (2004). A mathematical model for the management of an Invalidity Old Age Survivor Pension Fund: The Exact Individual Trajectories Method. PU.M.A. Pure Mathematics and Applications, Vol. 15, No. 1, Hungary

5. Angrisani M., Attias A., Bianchi S., Varga Z. (2006). Demographic dynamic for the pay-as-you-go pension system. PU.M.A. Pure Mathematics and Applications, Vol. 15, No. 4 Hungary .

6. Baldacci F., Lungaresi S. (1995). Social expenditure and demographic evolution: a dynamic approach. Euro conference Social Policy in environment of insecurity. November 8/11, ISEGI, New University of Lisbon, Portugal.

7. Caselli G., Peracchi F, Balbi E., Lipsi R. (2003). Differential mortality and the design of the Italian system of public pensions. Labour 17, 45-78, Special issue.

8. Caswell, H. (1989). Matrix population models: construction analysis and interpretation. Sinauer Ass. Inc. Publ. Sunderland Massachusetts, USA.

9. Commissione Ministeriale per la valutazione degli effetti della legge n°335/95 e successive provvedimenti (2001). Verifica del sistema previdenziale ai sensi della legge 335/95 e successive provvedimenti, nell’ottica della competitività dello sviluppo e dell’equità. Roma, Italia.

10. Coppini M. A. (1989). Il modello Inps e le prime proiezioni al 2010. Inps, supplemento alla rivista Previdenza Sociale, Roma, Italia.

11. Franco D. (2001). The search for a sustainable pay-as-you-go pension system. International Seminar on Pensions, March 5/7 Sano-Shoin, Hitotsubashi University, Tokyo, Japan.

12. Franco D., Morcaldo G. (1986). Un modello di previsione degli squilibri del sistema previdenziale: valutazione di alcune linee di risanamento. Il sistema pensionistico – problemi e prospettive. Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma, Italia.

13. Istat (2002). Le previsioni della popolazione residente per sesso, età e regione dall’1.01.2001 all’1.01.2051. Informazioni a cura di Marsili M. e Sorvillo M.P., Roma, Italia.

14. Leslie P. H. (1945). On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 33, No 3, 183-212, Oxford University Press, UK.

15. Leslie P. H. (1948). Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 35, No 3-4, 213-245, Oxford University Press, UK.

16. Maurin F, Saint-Pierre P. Aubin J-P. and Bonneuil N. (2001) Viability of pay-as-you-go systems. Journal of Evolutionary Economics. Vol. 11, Springer, Berlin-Heidelberg, Germany.

17. Varga Z. (1984). Un modelo en la dinámica de poblaciones. Notas de Matemàticas de la Universidad Central de Venezuela, 84-ED-03 1-40. Venezuela.

APPENDICE

Tassi annui di capitalizzazione di cui alla legge 8 agosto 1995, n. 335

Anno k	r_k
1976	0,156004
1977	0,190509
1978	0,216775
1979	0,210426
1980	0,203363
1981	0,226929
1982	0,214364
1983	0,205767
1984	0,202694
1985	0,186164
1986	0,160219
1987	0,142703
1988	0,126341
1989	0,115314
1990	0,105217
1991	0,101013
1992	0,097075
1993	0,088611
1994	0,072990
1995	0,065726
1996	0,062054
1997	0,055871
1998	0,053597
1999	0,056503
2000	0,051781
2001	0,047781
2002	0,043698
2003	0,041614
2004	0,039272
2005	0,040506

Coefficienti di trasformazione di cui alla legge 8 agosto 1995, n. 335

Età i	c_i
57	4,720%
58	4,860%
59	5,006%
60	5,163%
61	5,334%
62	5,514%
63	5,706%
64	5,911%
65	6,136%